نموذج الأسئلة يليها الأجابة النموذجية للمادة

جامعة بنها رياضيات عامة(2)105ر الفصل الثانى 2013/2012

كلية العلوم (المستوى الأول) الزمن:ساعتان الأحد 2013/6/9

أجب عن الأسئلة التالية (الدرجة الكلية 80 درجة)

السؤال الأول

أ- أكتب المعادلة الكارتيزية للمنحنى $r = 2(1 + \sin\theta)$.

ب-أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين

$2x + 5y + 3 = 0, 3x + y = 2$ **,ويصنع مع الأتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها** 135^0 .

ج-أوجد أحداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤرى العمودى ومعادلة المحور والدليل للقطع المكافىء $y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$.

السؤال الثانى

أ-أوجد مركز ونصف قطر الدائرة $3x^2 + 3y^2 - 6x + 3y - 6 = 0$ **. وكذلك معادلة المماس المرسوم من النقطة**$(-2, 0)$**الواقعه عليها.**

ب-أثبت أن الدائرتين

$$s_1 = x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$$

$$s_2 = x^2 + y^2 + 4x + 4y + 28 = 0$$

تتقاطعان على التعامد .ثم أوجد معادلة الوتر المشترك.

ج-أوجد الشرط اللازم لكى يمس المستقيم $3x + 4y = k$ ***الدائرة***

$$x^2 + y^2 - 10x = 0$$

بقية الأسئلة فى الصفحه الأخرى

السؤال الثالث

أ-أوجد قيمة كل من التكاملات التالية

$$\int \sin^{-1} x\, dx, \quad \int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x\, dx, \quad \int \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

ب-عين أحداثيات المركز والبؤرتين ومعادلتى الدليلين والمحورين وأوجد طول الوتر البؤرى العمودى للقطع الناقص $9x^2+16y^2-18x+64y-71=0$.

السؤال الرابع

أ-أوجد قيمة التكاملات التالية

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x\, dx$$

ب-*أحسب المساحة المحصورة* بين القطع المكافىء $y=(x-2)^2$ *والخط المستقيم* $y=x$.

ج-عين أحداثيات البؤرتين ومعادلتى الدليلين وطول محورى القطع والوتر البؤرى العمودى للقطع الزائد $9x^2-16y^2=144$ ثم أوجد معادلتى الخطان التقاربيان.

مع أطيب تمنياتنا بالنجاح

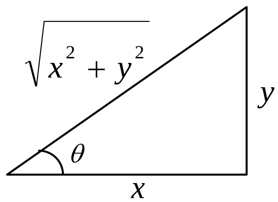
قسم الرياضيات بالكلية

اجابة السؤال الأول

أ- باستخدام العلاقات التي تعطي (r,θ) بدلالة (x,y) هي

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad , \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

ومن مثلث الزاوية θ نجد أن



$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

أي أن معادلة المنحنى تصبح

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\therefore x^2+y^2=2\sqrt{x^2+y^2}+2y$$

بالتربيع نحصل على

$$\therefore (x^2+y^2-2y)^2=4(x^2+y^2)$$

ب- معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين هي

$$2x+5y+3+\lambda(3x+y-2)=0$$

ميله هو $\tan 135^0=-1$ والميل هو

$$-1=\frac{-2-3\lambda}{5+\lambda}$$

$$-5-\lambda=-2-3\lambda \Rightarrow 2\lambda=3 \Rightarrow \lambda=\frac{3}{2}$$

$2x + 5y + 3 + \frac{3}{2}(3x + y - 2) = 0$

$4x + 10y + 6 + 9x + 3y - 6 = 0$

$13x + 13y = 0 \Longrightarrow x + y = 0$

<u>ج-الحـــــل :</u>

بإكمال المربع يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$(y-2)^2 = -(x+1)$

$4a = -8 \Longrightarrow a = -2$

الرأس $(\alpha, \beta) = (-1,2)$

البؤرة $(\alpha + a, \beta) = (-1-2,2) = (-3,2)$

الوتر البؤرى العمودى $4a = 8$

معادلة المحور $y = \beta \Longrightarrow y = 2$

معادلة الدليل $x = \alpha - a = -1 + 2 = 1$

<u>أجابة السؤال الثانى</u>

أ- بقسمة المعادلة على 3 نحصل على

$x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$

$\therefore f = -1 \;\;,\;\; g = 1/2 \;\;,\;\; c = -2$

$\therefore$ مركز الدائرة هو $(1, -1/2)$ ونصف قطر $r = \sqrt{f^2 + g^2 - c} = \sqrt{\frac{13}{4}}$

- معادلة المماس على الصورة

$$xx_1 + yy_1 + f(x + x_1) + g(y + y_1) + c = 0$$

$$-2y + (x + 0) - \frac{1}{2}(y - 2) - 2 = 0$$

$$5y - 2x + 2 = 0$$

ب- الحـــل :

$$f_1 = 1 \quad , \quad g_1 = 0 \quad , \quad c_1 = -24$$

$$f_2 = 2 \quad , \quad g_2 = 2 \quad , \quad c_2 = 28$$

$$\therefore 2f_1f_2 + 2g_1g_2 = 2(1)(2) + 2(0)(2) = 4$$

$$\therefore c_1 + c_2 = -24 + 28 = 4$$

$$\therefore 2f_1f_2 + 2g_1g_2 = c_1 + c_2$$

إذن الدائرتان متقاطعتان على التعامد . ولإيجاد معادلة الوتر المشترك نطرح معادلتي الدائرتين فنحصل على

$$S_1 - S_2 = x + 2y + 26 = 0$$

∴ معادلة الوتر المشترك هي

$$x + 2y + 26 = 0$$

ج- الشرط اللازم هو نصف القطر= طول العمود الساقط من المركز الى المماس

$$f = -5, g = 0, c = 0$$

المركز هو(0,5)

$$\sqrt{25} = \mp \frac{(3.5 + 0 - k)}{\sqrt{9+16}} \Longrightarrow k = -10$$

أجابة السؤال الثالث

$$u = \sin^{-1} x \quad , \quad dv = dx$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = x$$

$$\therefore \int \sin^{-1} x\, dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{(-2x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

الحـــل : نلاحظ هنا أن التكامل يحتوي الحد $4 - x^2$ والذي يمكن كتابته على الصورة $a^2 - x^2$ حيث $a = 2$ وعلى ذلك نستخدم التعويض المناسب وهو $x = 2\sin u$. ومنها $dx = 2\cos u\, du$ وعلى ذلك يصبح مقام التكامل على الصورة

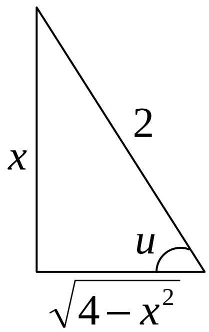
$$\therefore (4 - x^2)^{3/2} = (4 - 4\sin^2 u)^{3/2} = (4\cos^2 u)^{3/2} = 8\cos^3 u$$

بالتعويض في التكامل نحصل على

$$I = \int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} = \int \frac{2\cos u\, du}{8\cos^3 u} = \frac{1}{4} \int \sec^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{4}\tan u + c$$

وأخيراً للتعبير عن الناتج بدلالة x نجد من التعويض المستخدم أن $\sin u = x/2$ وبالتعويض من مثلث الزاوية u نحصل على



$$I = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + c$$

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx = \int \sqrt{\sin x}\, d\sin x = \frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

- نلاحظ أن هذا الكسر صحيح أي درجة البسط أقل من درجة المقام أي أنه يمكن تحليله مباشرة إلى كسورة الجزئية

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

بضرب الطرفين في المقام المشترك نحصل على

$$\therefore 1 = A(x+3) + B(x-1)$$

بوضع $x=1$ ينتج أن $A=1/4$ وبوضع $x=-3$ ينتج أن $B=-1/4$ ومن ثم يصبح التكامل على الصورة

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+3)} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)} = \frac{1}{4}\ln(x+3) - \frac{1}{4}\ln(x-1) + c$$

$$= \boldsymbol{ln\frac{(x+3)}{(x-1)} + c}$$

ب-الحـــل :

بإكمال المربع في x, y تصبح المعادلة على الصورة

$$\mathbf{9(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 144}$$

بالقسمة على 144 تصبح المعادلة في الصورة النهائية

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

المركز $(\alpha, \beta) = (1, -2)$

وبالتالي يكون

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \Longrightarrow a = 4, b = 3$$

ومن العلاقة أن نجد $b^2 = a^2(1-e^2)$ $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

ومن المعادلة نحصل على

1- المركز هو النقطة $(1,-2)$

2- البؤرتان هما $(1 \pm ae, -2) = (1 \pm \sqrt{7}, -2)$

3- معادلتي الدليلين هما $x = 1 \pm \frac{a}{e} = 1 \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$

4- معادلة المحور الأكبر هى $y = 2$, ومعادلة المحور الأصغر هي $x = -1$.

5- طول الوتر البؤري العمودي = $\frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2}$

أجابة السؤال الرابع

أ- باستخدام التعويض

$$x = a\sin u \quad , \quad dx = a\cos u\, du$$
$$At\, x = 0 \Rightarrow \therefore u = 0 \, , \, At\, x = a \Rightarrow \therefore u = \pi / 2$$

بالتعويض في التكامل نحصل على

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} a\cos u \cdot a\cos u\, du = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2u)\, du$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[u + \frac{1}{2}\sin 2u \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\pi a^2$$

الحـــل :

الدالة $f(x) = sin^2xcos^3x$ دالة زوجية وباستخدام الخاصية نجد أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3xsin^2xdx$$

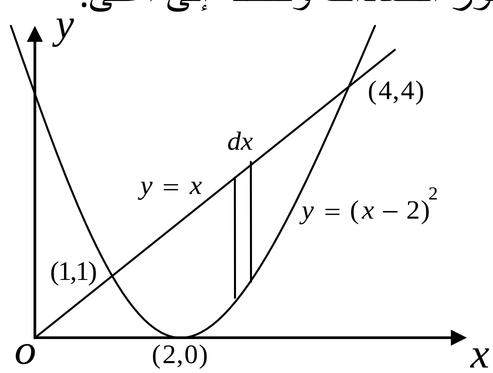
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xsin^2xd\sin x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2x)\, sin^2xd\sin x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2x - sin^4x) d\sin x = (\frac{1}{3}sin^3x - \frac{1}{5}sin^5x)_o^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

ب الحـــل :

بحل معادلتي القطع والمستقيم معاً نجد أن نقطتي تقاطعهما هما $(1,1),(4,4)$ ونلاحظ أن رأس القطع هي النقطة $(2,0)$ومحوره يوازي محور الصادات وفتحته إلى أعلى.



من قانون المساحة المحصورة بين منحنيين نجد أن قيمة المساحة A المطلوبة تساوي

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_1^4 \left[x - (x-2)^2\right]dx = \frac{9}{2}$$

ج- بكتابة المعادلة في الصورة القياسية وذلك بالقسمة على 144 نجد أن

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow \therefore a = 4 \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow \therefore b = 3$$

$\therefore$ طول المحور القاطع = $8 = 2a$

وطول المحور المرافق = $6 = 2b$

من العلاقة $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ نجد أن $e = 5/4$ وبالتالي تكون

البؤرتان هما $(\pm ae, 0) = (\pm 5, 0)$

معادلتي الدليلين هما $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{16}{5}$

طول الوتر البؤري العمودي $\frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2}$

معادلتى الخطان التقاربيان هما

$$y = \mp \frac{b}{a} x \Longrightarrow y = \mp \frac{3}{4} x$$